

EXAMEN SELECTIVIDAD ANDALUCIA JUNIO 2012
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

Ejercicio 1:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + A^t = I_2$.
- b) ¿Qué requisitos mínimos debe cumplir una matriz B para que pueda efectuarse el producto $A \cdot B$?
- c) ¿Y para el producto $3 \cdot B \cdot A$?

a) Sea X la matriz dada por $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse que $AX = I_2 - A^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de las dos matrices

$$\begin{array}{lcl} a-c=0 & \Rightarrow & a=c \\ 2a-c=1 & \Rightarrow & a=c=1 \\ \left. \begin{array}{l} b-d=-2 \\ 2b-d=2 \end{array} \right\} & \Rightarrow & b=4, d=6 \end{array}$$

Por lo tanto

$a=1$	$b=4$	$c=1$	$d=6$
-------	-------	-------	-------

$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
--

b) Para poder efectuar el producto $A \cdot B$ debe cumplirse que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B , igual a dos

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times p}$$

c) Para poder efectuar el producto $3 \cdot B \cdot A$ debe cumplirse que el número de columnas de la matriz B sea igual al número de filas de la matriz A , igual a dos

$$B_{m \times 2} \cdot A_{2 \times 2}$$

Ejercicio 2:

Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

- Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.
- Para $a = 8$ represente su gráfica e indique en qué periodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.
- Para $a = 8$ indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los primeros 6 años y a cuánto asciende su valor.

a) $B(t)$ es continua en $(0, 6) \cup (6, 10)$ por ser composición de funciones polinómicas. Estudiemos lo que sucede en el punto $t = 6$

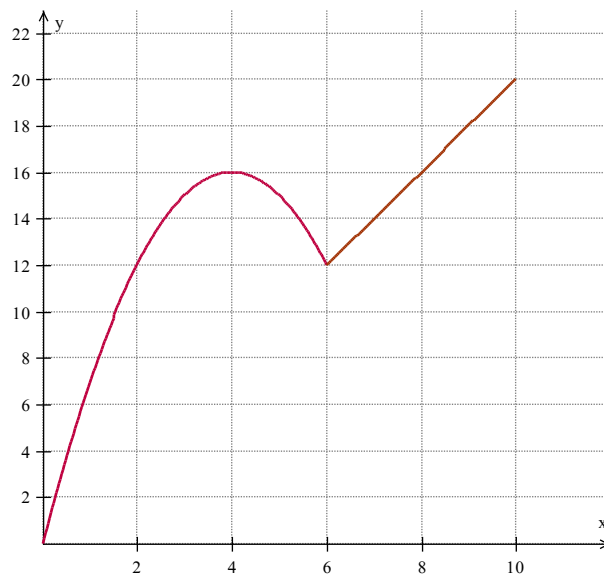
$$\lim_{x \rightarrow 6^-} B(t) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (at - t^2) = 6t - 36 = B(6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} B(t) = \lim_{x \rightarrow 6^+} 2t = 12$$

Igualando ambas expresiones $6a - 36 = 12$ de donde

$$a = 8$$

b) La gráfica de la función viene dada por



La función crece en $(0, 4) \cup (6, 10)$ y decrece en $(4, 6)$

c) En el intervalo $(0, 6)$ la función es una parábola cóncava, por lo que el máximo se alcanza en el vértice, que viene dado por el punto

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4 \quad \text{y} \quad B(4) = 16$$

El máximo beneficio durante los primeros seis años se obtiene en el cuarto año y asciende a 16 millones de euros

Ejercicio 3:

En una localidad hay solamente dos supermercados A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos.

Si se elige un ciudadano al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) Compre en algún supermercado.
- b) No compre en ningún supermercado.
- c) Compre solamente en un supermercado.
- d) Compre en el supermercado A, sabiendo que no compra en el B.

$$P(A) = 0.58 \quad P(B) = 0.35 \quad P(A \cap B) = 0.12$$

$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.58 + 0.35 - 0.12 = 0.81$$

$$b) P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.81 = 0.19$$

$$c) P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0.46 + 0.23 = 0.69$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.58 - 0.12 = 0.46$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.35 - 0.12 = 0.23$$

$$d) P(A / \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.46}{1 - 0.35} = 0.71$$

Ejercicio 4:

Se considera que, a lo sumo, el 5% de los artículos guardados en un almacén son defectuosos. Pasado un tiempo, la persona encargada del mantenimiento del almacén decide investigar si esa estimación es adecuada. Para ello, escoge aleatoriamente 300 artículos de los que 35 están defectuosos.

a) Plantee un contraste de hipótesis ($H_0 : p \leq 0.05$) para determinar si ha aumentado la proporción de artículos defectuosos. Obtenga la región crítica del contraste para un nivel de significación del 5%

b) ¿Qué conclusión se obtiene con los datos muestrales observados?.

a) Sea $\alpha = 0.05$ el nivel de significación, $n = 300$, $p = 0.05$, $q = 0.95$, $p = \frac{35}{300} = 0.12$

Hipótesis nula $H_0 : p \leq 0.05$

Hipótesis alternativa $H_1 : p > 0.05$

La zona de aceptación viene dada por viene dada por

$$ZA = (-\infty, p + z_{\alpha} \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

$$\alpha = 0.05 \quad c = 1 - \alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha} = 1.645$$

Sustituyendo en la fórmula anterior

$$ZA = (-\infty, 0.05 + 1.645 \sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{300}}) = (-\infty, 0.071)$$

La región crítica será por tanto el intervalo $(0.071, +\infty)$

b) $p = \frac{35}{300} = 0.12$ está dentro de la zona crítica y no de la región de aceptación, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa, es decir, la proporción de artículos defectuosos sí ha aumentado y es superior a un 5%