EXAMEN SELECTIVIDAD ANDALUCIA SEPTIEMBRE 2011
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se considera el recinto R del plano, determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \geq 2, \quad x + 3y \leq 15, \quad 3x - y \leq 15, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 3x + y$ en dicho recinto.

c) **(0.5 puntos)** Razone si existen puntos (x, y) del recinto, para los que $F(x, y) = 30$.

a) En primer lugar hallamos las tablas de valores para las rectas que determinan las regiones del plano definidas por las inecuaciones dadas

x + y = 2

x	0	2
y	2	0

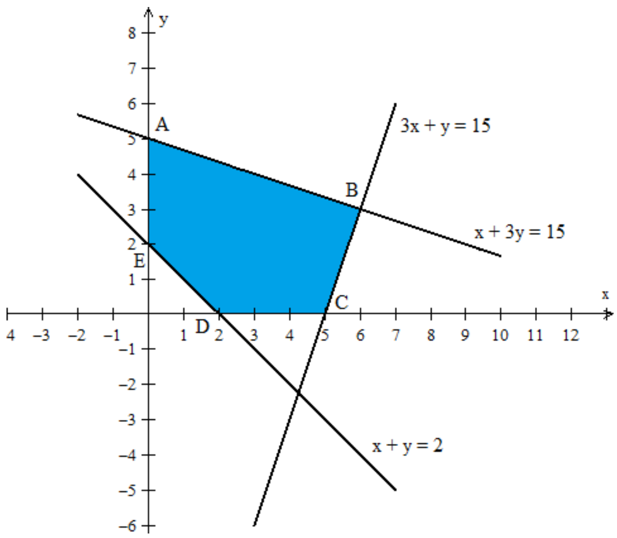
x + 3y = 15

x	0	6
y	5	3

3x - y =15

x	5	6
y	0	3

De donde obtenemos el recinto



Calculemos las coordenadas de los vértices A, B, C y D señalados en la representación anterior

$A\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$ A(0,5) $\quad B\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$ B(6,3) $\quad C\begin{cases} y = 0 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ C(5,0)

$D\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ C(2,0) $\quad E\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ E(0,2)

b) F(x, y) = 3x + y

F(A) = F(0,5) = 5 F(B) = F(6,3) =21 F(C) = F(5 0) = 15 F(D) = F(2,0) = 6 F(E) = F(0,2) = 2

El mínimo se alcanza en el punto E(0,2) y vale 2

El máximo se alcanza en el punto B(6,3) y vale 21

c) No puede suceder que F(x,y) = 30, ya que el máximo se alcanza en uno de los vértices, y ya hemos visto que vale 21

EJERCICIO 2

a) **(1.25 puntos)** Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{4x}{2x+1}$$

b) **(1.25 puntos)** Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x)=x^3+3x^2+3x$.

a) El dominio está formado por los puntos donde no se anula el denominador.

$$2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Domf=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Eje OX: y = 0 $\Rightarrow$ 4x = 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ (0,0)

Eje OY: x = 0 $\Rightarrow$ y = 0 $\Rightarrow$ (0,0)

AH: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{2x+1}=2 \quad \Rightarrow \quad y=2$

AV: $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{4x}{2x+1}=\dfrac{-2}{0}=\infty \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{2}$

AO: No hay, puesto que la función tiene una asíntota horizontal

b) $g(x)=x^3+3x^2+3x$

Hallemos los puntos donde se anule la derivada primera

$g'(x)=3x^2+6x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$ doble

Estudiamos el signo de la derivada a ambos lados de $x=-1$

	-1	
+		+
$\nearrow$		$\nearrow$

Por lo tanto la función es creciente en todo su dominio y no tiene extremos

Calculemos los puntos donde se anula la derivada segunda

$g''(x)=6x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$ como ya sabíamos

Estudiamos el signo de la derivada segunda a ambos lados de $x=-1$

	-1	
-		+
Cóncava		Convexa

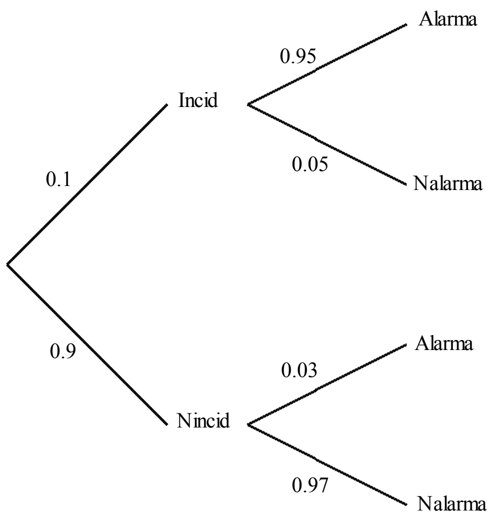
La función es cóncava en $(-\infty,-1)$ y convexa en $(-1,+\infty)$ y tiene un punto de inflexión en $x=-1$

EJERCICIO 3

En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0.95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0.03.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma?

b) **(1 punto)** Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.



a) P(Alarma) = 0.1 · 0.95 + 0.9 · 0.03 = 0.122

b) $P(NI / A) = \dfrac{P(NI \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.9 \cdot 0.03}{0.122} = 0.221$

EJERCICIO 4

Suponiendo que la variable "años de vida de los individuos de un país" sigue una distribución Normal con desviación típica 8.9 años, se desea contrastar la hipótesis de que la vida media de los mismos no supera los 70 años.

A partir de una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido que su vida media ha sido 71.8 años.

a) **(0.5 puntos)** Formule el contraste de hipótesis que indica el enunciado.

b) **(1 punto)** Determine la región crítica a un nivel de significación del 5%.

c) **(1 punto)** Con los datos muestrales, ¿existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis a ese nivel de significación?

a) $X \in N(\mu, 8.9)$

Tenemos un contraste de hipótesis unilateral para la media

Hipótesis nula $H_0 : \ \mu \leq 70$

Hipótesis alternativa $H_1 : \ \mu > 70$

b) $\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad z_\alpha = 1.645$

La zona crítica viene dada por el intervalo $\left(-\infty, \mu + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Sustituyendo con los valores del problema

$$\left(-\infty, \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(-\infty, 70 + 1.645 \frac{8.9}{\sqrt{100}} \right) = (-\infty, 71.4641)$$

c) $\mu_0 = 71.8$ no se encuentra dentro de la región crítica, por lo que se rechaza la hipótesis nula, es decir, la vida media de los individuos del país sí superaría los 70 años