EXAMEN SELECTIVIDAD ANDALUCIA SEPTIEMBRE 2011
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) **(1.25 puntos)** Efectúe, si es posible, los siguientes productos:

$$A \cdot A^t ; \quad A^t \cdot A ; \quad A \cdot B$$

b) **(1.25 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = B$

a) $A_{2x3}\ ,\ A^t_{3x2} \quad \Rightarrow \quad A \cdot A^t_{2x2} \quad \Rightarrow \quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^t_{3x2}\ ,\ A_{2x3} \quad \Rightarrow \quad A \cdot A^t_{3x3} \quad \Rightarrow \quad A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{2x3}\ ,\ B_{2x2} \quad \Rightarrow$ No se puede efectuar el producto, ya que el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B

b) $A \cdot A^t \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad (A \cdot A^t) \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad (A \cdot A^t)_{2x2} \cdot X_{mxn} = B_{2x2}$

Para que pueda resolverse la ecuación B debe ser una matriz de orden 2x2.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de ambas matrices $a = 3,\ \ b = -1,\ \ c = 1/2,\ \ d = 1$

Por lo tanto $\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si} \quad x\le 2 \\ \\ 4-\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a.
b) **(1 punto)** Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

a) La función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ por estar formada por funciones continuas y derivables, ya que el denominador de $f(x)=\dfrac{a}{x}$ no se anula en $(2,+\infty)$. Veamos lo que pasa en el punto $x=2$

Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-3x+4)=2=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(4-\dfrac{a}{x})=4-\dfrac{a}{2} \end{array}\right\} \text{ Igualando ambas expresiones } \ 4-\frac{a}{2}=2$$

Y para que la función sea continua en $x=2$ debe cumplirse $\boxed{a=4}$

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x<2 \\ \dfrac{4}{x^2} & x>2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-3)=1 \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{x^2}=1 \end{array}\right\}$$

La función es continua y derivable en $x=2$ para dicho valor de a, por lo que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$

b)

$f_1(x)=x^2-3x+4$ es una función polinómica, y por lo tanto no tiene asíntotas de ningún tipo

Sea $f_2(x)=4-\dfrac{1}{x}$, para $x>2$

$$\lim_{x\to+\infty}(4-\frac{1}{x})=4 \quad \Rightarrow \quad y=4 \quad \text{es una AH cuando } x\to+\infty$$

No tiene asíntotas verticales porque el denominador de $f_2(x)=4-\dfrac{1}{x}$ se anula en $x=0$, que no pertenece a su dominio de definición. Tampoco tiene asíntotas oblicuas, debido a la existencia de una asíntota horizontal.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A)=0.4,\ P(B)=0.5 \text{ y } P(A\cap B)=0.2.$$

a) **(1.5 puntos)** Calcule las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)$, $P(A/B)$ y $P(B/A^C)$.

b) **(0.5 puntos)** Razone si A y B son sucesos incompatibles.

c) **(0.5 puntos)** Razone si A y B son independientes.

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.5-0.2=0.7$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0.5-0.2}{0.6}=0.5$$

b) $P(A\cap B)=0.2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad A\cap B\neq\varnothing \quad \Rightarrow$ A y B no son incompatibles

c) A y B son independientes si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(A)P(B)=0.4\cdot 0.5=0.2=P(A\cap B)$, por lo tanto los sucesos A y B sí son independientes

EJERCICIO 4

Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 47.5 y 52.5?

a) $X \in N(50,4)$, $n=16$

$$\overline{X} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(50, \frac{4}{4}) = N(50,1)$$

b) $P(47.5 < \overline{X} < 52.5) = P\left(\frac{47.5-50}{1} < Z < \frac{52.5-50}{1}\right) = P(-2.5 < Z < 2.5) =$

$= P(z < 2.5) - P(Z < -2.5) = 2P(Z < 2.5) - 1 = 2 \cdot 0.9938 - 1 = 0.9876$